

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 34

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului  $10 - (10 - 20 : 2) \cdot 6$  este egal cu ... .
- 5p 2. Dacă  $\frac{x-4}{12} = \frac{1}{6}$ , atunci  $x$  este egal cu ... .
- 5p 3. Cel mai mic număr întreg care aparține intervalului  $(-5, 5)$  este egal cu ... .
- 5p 4. Pătratul  $ABCD$  are diagonala  $AC = 2\sqrt{2}$  cm. Aria acestui pătrat este egală cu ... cm<sup>2</sup>.
- 5p 5. În *Figura 1* este reprezentată o piramidă patrulateră  $VABCD$  cu  $VO \perp (ABC)$ . Unghiul dreptelor  $VO$  și  $DC$  are măsura de ...°.

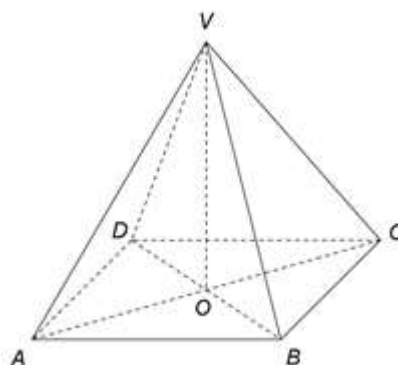
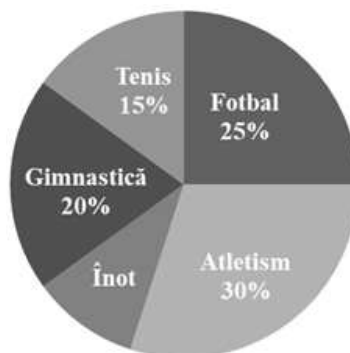


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare este reprezentată distribuția celor 240 de elevi ai unui club sportiv în funcție de sportul practicat. Fiecare elev practică un singur sport.



Conform informațiilor din diagramă, numărul elevilor care practică înotul este egal cu ... .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

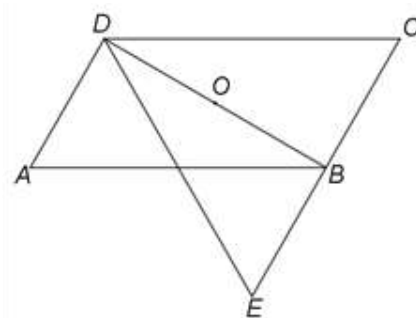
- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un cub  $ABCD A' B' C' D'$ .
- 5p 2. Determinați numărul natural  $\overline{abc}$  cu proprietatea că  $\overline{abc} + \overline{bc} = 176$ .
- 5p 3. O echipă de hochei are în lot 15 jucători. Într-un meci, fiecare hocheist a jucat același număr de minute, iar în teren s-au aflat în permanență 6 jucători. Determinați câte minute a jucat un hocheist, știind că meciul a durat o oră.
4. Se consideră numerele reale  $a = \frac{201}{2} + \frac{401}{4} + \frac{601}{6} + \frac{1201}{12}$  și  $b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{32} + \sqrt{48}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{32} - \sqrt{48}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ .
- 5p a) Arătați că  $a = 401$ .
- 5p b) Calculați media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$ .

- 5p** 5. Se consideră expresia  $E(x) = 2(x+1)(x-3) + (x+3)(1-x) + (x+2)(2-x) + 6x$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E^2(1) + E^2(2) + E^2(3) + \dots + E^2(2020) = 2020E(x)$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.**

**(30 de puncte)**

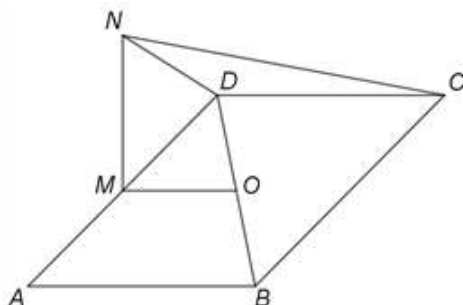
1. În *Figura 2* este reprezentat un paralelogram  $ABCD$  cu  $AD \perp BD$ ,  $AB = 10\text{cm}$  și  $AD = 5\text{cm}$ . Punctul  $O$  este intersecția diagonalelor  $AC$  și  $BD$ , iar punctul  $E$  este simetricul punctului  $C$  față de punctul  $B$ .



*Figura 2*

- 5p** a) Arătați că  $BD = 5\sqrt{3}\text{cm}$ .  
**5p** b) Demonstrați că triunghiul  $DEC$  este echilateral.  
**5p** c) Arătați că, dacă  $P$  este punctul de intersecție a dreptelor  $AB$  și  $DE$ , atunci aria patrulaterului  $BCOP$  este egală cu  $\frac{75\sqrt{3}}{8}\text{cm}^2$ .

2. În *Figura 3* este reprezentat un dreptunghi  $ABCD$  cu  $AB = 8\text{cm}$ ,  $BC = 12\text{cm}$  și  $O$  este punctul de intersecție a dreptelor  $AC$  și  $BD$ . Punctul  $M$  este mijlocul laturii  $AD$ , dreapta  $MN$  este perpendiculară pe planul  $(ABC)$  și  $MN = 6\text{cm}$ .



*Figura 3*

- 5p** a) Arătați că aria dreptunghiului  $ABCD$  este egală cu  $96\text{cm}^2$ .  
**5p** b) Demonstrați că dreapta  $MO$  este paralelă cu planul  $(NCD)$ .  
**5p** c) Se consideră punctul  $P$ , mijlocul laturii  $BC$ . Demonstrați că distanța de la punctul  $P$  la dreapta  $AN$  este mai mare decât  $9\text{cm}$ .

## TESTUL 34: REZOLVARE

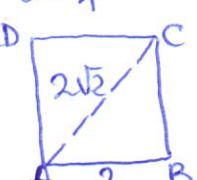
SUBIECTUL I: 1)  $10 - (10 - 20 : 2) \cdot 6 = 10 - (10 - 10) \cdot 6 =$   
 $= 10 - 0 \cdot 6 = 10 - 0 = 10.$

2)  $\frac{x-4}{12} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(x-4) = 12 \cdot 1 \Leftrightarrow 6x - 24 = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x = 24 + 12 \Leftrightarrow 6x = 36 \Leftrightarrow x = 36 : 6 \Leftrightarrow x = 6$

sau  $\frac{x-4}{12} = \frac{2}{6} \Leftrightarrow \frac{x-4}{12} = \frac{2}{12} \mid \cdot 12 \Leftrightarrow x-4 = 2 \Leftrightarrow x = 6.$

3)  Cel mai mic întreg din  $(-5; 5)$  este  $-4.$

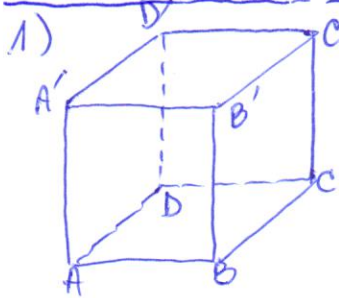
4)   $d = l\sqrt{2}$   
 $2\sqrt{2} = l\sqrt{2} \Rightarrow l = 2 \text{ (cm)}$   $A_{\square} = l^2$   
 $A_{ABCD} = AB^2 = 2^2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$

5)  $VO \perp (ABC)$   $\left\{ \Rightarrow VO \perp DC \right.$  (O dr.  $\perp$  pe plan este  $\perp$  pe orice dr. din pl.)  
 $DC \subset (ABC)$   $\left\{ \begin{array}{l} \perp \\ m(VO; DC) = 90^\circ \end{array} \right.$

6)  $20\% + 15\% + 25\% + 30\% = 90\%$ ;  $100\% - 90\% = 10\%$   
Deci 10% din elevi practică înotul.

$\left(\frac{10}{100} \text{ din } 240\right) = \frac{10}{100} \cdot 240 = 24 \text{ (elevi)}.$

### SUBIECTUL al II-lea:



2)  $\overline{abc} \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{abc} + \overline{bc} = 176 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot 100 + \overline{bc} + \overline{bc} = 176 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$  și  $2\overline{bc} = 76 \Rightarrow \overline{bc} = 38.$

R: Numărul căutat este 138.

3) Numărul de minute „jucate” de 6 jucători într-o oră este de  $6 \cdot 60 = 360$  minute.

Aceste minute „jucate” se distribuie în mod egal la cei 15 jucători (fiecare a jucat același nr. de minute)  $\Rightarrow$

$\Rightarrow 360 : 15 = 24$  (minute). R: Un hocheist a jucat 24 minute.

$\frac{30}{60} = \frac{60}{60}$  Metoda a II-a: Notăm cu  $x$  nr. de minute jucate de un hocheist  $\Rightarrow$  Au jucat în teren  $15 \cdot x$  minute

Dar aceste minute „jucate” înseamnă 6 jucători în teren  $\times$  60 min. = 360 min. Deci  $15x = 360 \Rightarrow x = 24$  (min.)

$$4) a) a = \frac{201}{2} + \frac{401}{4} + \frac{601}{6} + \frac{1201}{12} = \frac{200}{2} + \frac{1}{2} + \frac{400}{4} + \frac{1}{4} + \frac{600}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1200}{12} + \frac{1}{12} = 400 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = 400 + \frac{6+2+3+1}{12} = 400 + \frac{12}{12} = 400 + 1 = 401.$$

[Obs. Se putea calcula direct, fără "artificiul" anterior.]

$$b) b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}}{\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{5\sqrt{2} - 5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{5(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 1.$$

Deci  $a = 401$ ;  $b = 1$  și  $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{401+1}{2} = \frac{402}{2} = 201$

$$5) E(x) = 2(x^2 - 3x + x - 3) + (x - x^2 + 3 - 3x) + (2x - x^2 + 4 - 2x) + 6x = 2x^2 - 6x + 2x - 6 + x - x^2 + 3 - 3x + 2x - x^2 + 4 - 2x + 6x = 1.$$

$E(x) = 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

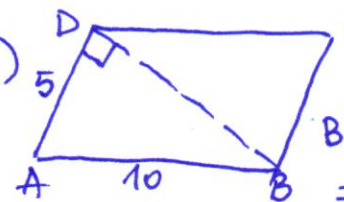
$$E^2(1) + E^2(2) + E^2(3) + \dots + E^2(2020) = \underbrace{1^2 + 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{2020 \text{ termeni}} =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{2020 \text{ termeni}} = 2020$$

$$2020 \cdot E(x) = 2020 \cdot 1 = 2020$$

$$\Rightarrow E^2(1) + E^2(2) + \dots + E^2(2020) = 2020 E(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \text{ g.e.d.}$$

SUBIECTUL al III-lea:

1)  T.P. în  $\triangle DAB$  cu  $m(\hat{D}) = 90^\circ$ :  
 $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$

$$BD = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}, \text{ g.e.d.}$$

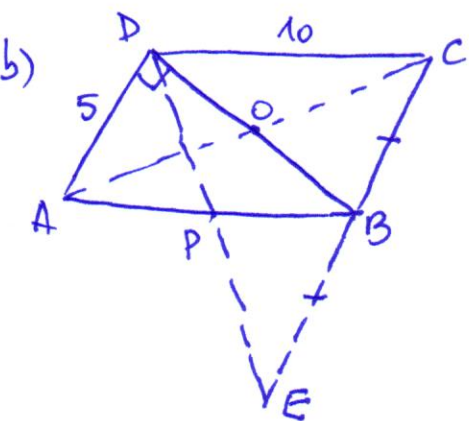
$E$ : simetricul lui  $C$  față de  $B \Rightarrow BC = BE \Rightarrow DB$ : mediană în  $\triangle DCE$ . (1)

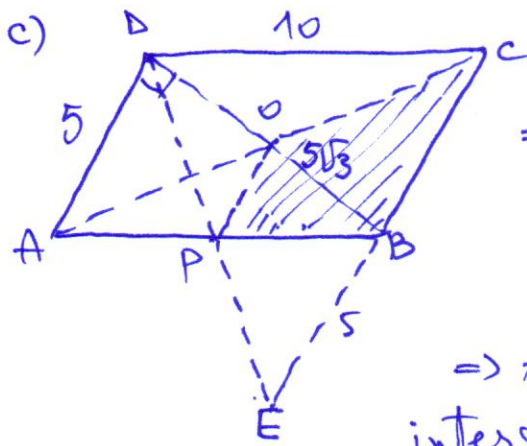
$DB \perp AD$  (ip);  $AD \parallel BC \Rightarrow DB \perp BC = EC \Rightarrow DB$ : înălțime în  $\triangle DCE$ . (2)

Din (1) și (2)  $\Rightarrow \triangle DCE$ : isoscel, cu  $DC = DE (= 10 \text{ cm.})$

Dar  $EC = 2BC = 2AB = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (cm)} \Rightarrow EC = DC = DE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DEC$ : echilateral, g.e.d.





c)  $[AC] \cap [BD]$  diagonale  $\Rightarrow$  se înjumătățesc,  
 $\Rightarrow \boxed{AO = OC}$  ( $\cap$   $BO = OD$ ). (3)

$AD = 5 \text{ cm} = BC = BE \Rightarrow AD = BE = 5 \text{ cm}$   
 $AD \parallel BC = BE \Rightarrow AD \parallel BE$

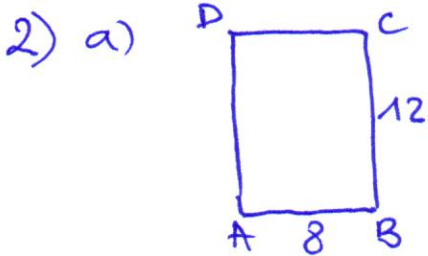
$\Rightarrow ADPE$ : paralelogram  $\Rightarrow P$ : punctul de  
intersecție a diagonalelor sale  $\Rightarrow \boxed{AP = PB}$  (4)

Din (3) și (4)  $\Rightarrow [OP]$ : linie mijlocie în  $\Delta ABC$ .

Acum  $\Delta APO \sim \Delta ABC$ , raportul lor de asemănare este egal  
(T. f. v)

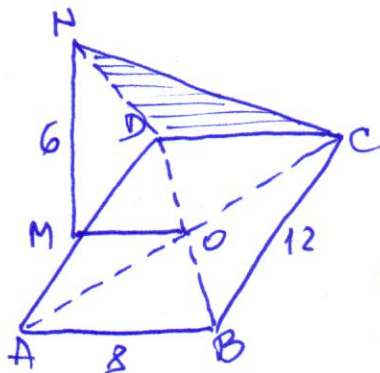
cu  $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$ , deci  $\frac{A_{\Delta APO}}{A_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{A_{\Delta ABC} - A_{\Delta APO}}{A_{\Delta ABC}} =$   
 $= \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$ . Deci  $A_{BCOP} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta APO} = \frac{3}{4} A_{\Delta ABC}$ .

$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} A_{ABCD}$ , iar  $A_{\Delta ABD} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{BD \cdot AD}{2} =$   
 $= \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$ . Atunci  $A_{BCOP} = \frac{3}{4} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \text{ (cm}^2\text{)}$   
(9. e. d.)



$A_{\square} = L \cdot l$ ;  $A_{ABCD} = AB \cdot BC = 8 \cdot 12 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$   
(9. e. d.)

b)



(T.) O dreaptă exterioară unui  
plan este paralelă cu planul  
dacă este paralelă cu o dreaptă  
conținută în plan.

$ABCD$ : dreptunghi  $\Rightarrow AO = OC$  și  $BO = OD$ , chiar  $AC = BD$ , pt.  
că diagonalele dreptunghiului sunt congruente și se înjumă-  
tătesc. Atunci, ținând cont și de faptul că  $AM = MB$ ,  
 $[MO]$ : linie mijlocie în  $\Delta ABC$ , deci  $MO \parallel CD$ .

$CD \subset (NCD) \Rightarrow$

$\Rightarrow MO \parallel (NCD)$ , conform (T.), (9. e. d.).



**EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a**  
**Matematică**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Test 34

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

**SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea**

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	10	5p
2.	6	5p
3.	-4	5p
4.	4	5p
5.	90	5p
6.	24	5p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.	Desenează cubul Notează cubul $ABCD A'B'C'D'$	4p 1p
2.	$\overline{abc} + \overline{bc} = 176 \Rightarrow a = 1$ $100 + 2\overline{bc} = 176 \Rightarrow \overline{bc} = 38$ , deci $\overline{abc} = 138$	2p 3p
3.	Numărul total de minute jucate este egal cu $6 \cdot 60 = 360$ de minute Cum aceste 360 de minute sunt jucate de 15 hocheiști în mod egal, rezultă că fiecare hocheist a jucat $360 : 15 = 24$ de minute	2p 3p
4.	a) $a = 100 + \frac{1}{2} + 100 + \frac{1}{4} + 100 + \frac{1}{6} + 100 + \frac{1}{12} = 400 + \frac{6+3+2+1}{12} =$ $= 400 + \frac{12}{12} = 401$	3p 2p
	b) $b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{5(\sqrt{2} - \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 1$ $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{401+1}{2} = 201$	3p 2p
5.	$E(x) = 2(x^2 - 3x + x - 3) + (x - x^2 + 3 - 3x) + (2x - x^2 + 4 - 2x) + 6x = 1$ , pentru orice număr real $x$ $E^2(1) + E^2(2) + E^2(3) + \dots + E^2(2020) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{1 \text{ de } 2020 \text{ ori}} = 2020 = 2020E(x)$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p

**SUBIECTUL al III-lea**

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABD$ este dreptunghic în $D$ , deci $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} =$ $= \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$ cm	3p 2p
----	---	----------

	<p><b>b)</b> Punctul <math>E</math> este simetricul punctului <math>C</math> față de punctul <math>B</math> deci <math>EC = 2BC = 10\text{cm}</math>  <math>B</math> este mijlocul segmentului <math>CE</math> și <math>AD \perp BD</math> și <math>AD \parallel BC \Rightarrow DB \perp CE</math>, deci <math>\triangle DEC</math> este isoscel și, cum <math>DC = EC = 10\text{cm}</math>, obținem că <math>\triangle DEC</math> este echilateral</p>	2p 3p
	<p><b>c)</b> <math>AD \parallel BE</math>, <math>AD = BE \Rightarrow AEBC</math> este paralelogram și, cum <math>\{P\} = AB \cap DE</math>, obținem că <math>P</math> este mijlocul segmentului <math>AB</math> și, cum <math>O</math> este mijlocul segmentului <math>BD \Rightarrow PO</math> este linie mijlocie în <math>\triangle ABD \Rightarrow PO \parallel AD</math> și <math>PO = \frac{AD}{2}</math></p> <p><math>AD \parallel BC \Rightarrow PO \parallel BC \Rightarrow BCOP</math> trapez și, cum <math>OB \perp BC</math>, obținem <math>\mathcal{A}_{BCOP} = \frac{(PO + BC) \cdot BO}{2} =</math></p> $= \frac{\left(\frac{5}{2} + 5\right) \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{8} \text{cm}^2$	3p 2p
2.	<p><b>a)</b> <math>\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC =</math>  <math>= 8 \cdot 12 = 96\text{cm}^2</math></p>	3p 2p
	<p><b>b)</b> <math>ABCD</math> dreptunghi și <math>\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow O</math> este mijlocul lui <math>AC</math> și, cum <math>M</math> este mijlocul laturii <math>AD</math>, obținem că <math>MO</math> este linie mijlocie în <math>\triangle ADC</math>  <math>MO \parallel DC</math> și <math>DC \subset (NDC)</math>, deci <math>MO \parallel (NDC)</math></p>	2p 3p
	<p><b>c)</b> <math>BP = \frac{BC}{2}</math> și cum <math>AD = BC</math>, obținem <math>AM = BP</math> și, cum <math>AM \parallel BP</math>, obținem <math>PM \perp AD</math> și, cum <math>MN \perp (ABC) \Rightarrow PM \perp MN</math> și <math>\{M\} = MN \cap AD \Rightarrow PM \perp (NAD)</math>  <math>PM \perp (NAD)</math>, <math>MQ \perp AN</math>, <math>Q \in AN</math> și <math>AN \subset (NAD) \Rightarrow PQ \perp AN</math>, deci <math>d(P, AN) = PQ</math></p>	2p 1p
	<p><math>AM \perp MN</math>, <math>MQ \perp AN \Rightarrow MQ = \frac{AM \cdot MN}{AN} = 3\sqrt{2}\text{cm} \Rightarrow PQ = \sqrt{PM^2 + MQ^2} = \sqrt{82} &gt; \sqrt{81} = 9\text{cm}</math></p>	2p